

# ニュートンの運動方程式と慣性力

金沢工業大学 基礎教育部

福島國雄

## ねらい

力学の問題を解く場合には必ず物体に作用しているすべての力とその性質を知る必要がある。たとえば、太陽の周りを公転している地球の運動を調べるには、地球に作用している力を知る必要がある。その力は、(太陽以外の天体の影響を無視し、太陽に固定された座標系を慣性系と見なして) 慣性系からみれば太陽が地球に及ぼす万有引力のみである。ところで、学生に地球に作用している力は何かと問うと、万有引力、遠心力、向心力など様々である。今ほど述べたように、慣性系では万有引力のみが地球に作用している。しかし、太陽の周りを公転している地球で地球の運動を見れば、地球に固定された座標系は非慣性系であるので地球に作用している力は、万有引力以外に遠心力が作用していると考えねばならない。しかし、遠心力は真の力ではない。また、向心力は今の問題の場合は万有引力のことである。このように、学生の中には、問題を解く際どのような座標系で考えているのか、つまり、慣性系で考えているのか、非慣性系で考えているのかをはっきりと意識している者が少ない。通常学ぶ運動の法則はもちろん慣性系を前提にしている。

以上のような実情を踏まえて、慣性系、非慣性系で観測される運動を整理しておく。

読者は、これからの議論の結果得られるいくつかの式を導く過程に興味があれば、そこは省略してよい。ただし、最初の 5 ページは是非読み通して欲しい。その後であれば、式 (A), (B), (C), (C)' のみで (もちろん、これらの式の前後の関わりから、式に用いられた記号の意味を推察し理解する必要はある) これから挙げる例を理解できるであろう (注意深く読んで欲しい。ただし、\*) を付けた例はやや難しいので、結果のみを見てもよいだろう)。

## 目次

1. 慣性系での運動方程式
    - 1.1 慣性系での運動方程式
    - 1.2 慣性系に対して等速度運動をする座標系
  2. 非慣性系での運動方程式
    - 2.1 慣性系に対して加速度をもつが回転しない座標系
    - 2.2 慣性系に対して一定の角速度をもつ座標系
- 付録A : 極座標, 極座標と直交座標, 極座標による運動表示  
付録B : 回転平面上を滑る物体の運動

# 1. 慣性系での運動方程式

## 1.1 慣性系での運動方程式

宇宙のどこかに、まわりに何も無い、つまり、星も、銀河も、ブラックホールも、このごろよく言われるダークマター（暗黒物質）も無い場所があったとしよう。そこへ突然どこからか物体が飛んできたとする（それが、どこから何が原因でそこへ来たのかは問わない）。そうするとその物体は、もし、最初に動いていたのであれば、一定の方向に一定の速さで動き続けるだろうし、最初に静止した状態であったならばずっと静止し続けるであろう、と想像できる。とにかく今述べたような場所が在ったとすると、その場所では

運動の第1法則：力の作用を受けない物体は、等速直線運動（等速度運動）を持続するか静止し続ける。

が成立する、とするわけである。ところで、上の表現には未定義の物理量すなわち“力”が含まれている。したがって、厳密に考えると、上の言い方では、運動の第1法則というのは何であるか何を言っているのかわからないことになる。

それで、運動の第1法則を、上に述べたような周りに何も無い空間があったとして、その場所で物体に作用する“力”を定義している、と考えるべきである。すなわち、物体の運動が等速直線運動から外れれば、つまり、物体が速くなったり、遅くなったり、曲がったりすればその原因を“力”であるとするわけである。また、静止している物体が動き出したり、あるいは動いていた物体が静止したりするとその原因も“力”のせいであるとするのである。そして、物体に“力”が作用した場合には

運動の第2法則：“力”が物体に力が作用すると、力の向きに加速度を生じる。その大きさは力の大きさに比例し質量に反比例する。

が成立する。つまり、運動方程式；質量×加速度＝力 が成立するというわけである。そしてもう1つ

運動の第3法則：作用と反作用は大きさが等しく向きは逆である。

が成立し、これら3つの法則が（Newtonの）運動の法則といわれている。そして、この運動の法則が成り立つ空間が在ったとしてこれを慣性系というわけである。今後、物体が運動している空間（慣性系に限らない）を、そこに適当な座標軸を設定して、“座標系”ということにする。

## 1.2 慣性系に対して等速度運動をする座標系

いま、1つの座標系  $S$  を慣性系とする。すなわち、 $S$  では運動の法則が成立している。そして、この  $S$  に対して一定の方向に運動している座標系  $S'$  があり、時刻  $t=0$  で2つの座標

系  $S, S'$  の座標軸が一致していた（もちろん2つの座標系の原点  $O, O'$  も一致していた）とする。さらに、2つの座標系  $S, S'$  で、質量  $m$  の質点  $P$  の運動を観測しているとする（図 1.1）。

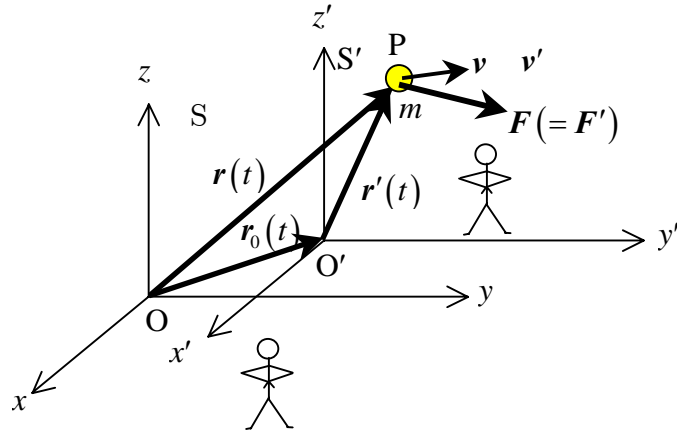


図 1.1 座標系  $S$ （慣性系）に対して一定方向に運動する座標系

時刻  $t=t$  における質点  $P$  の座標系  $S$  での位置座標を  $\mathbf{r}=(x, y, z)$ ，座標系  $S'$  での位置座標を  $\mathbf{r}'=(x', y', z')$  として  $O$  の  $O'$  に関する位置座標を  $\mathbf{r}_0=(x_0, y_0, z_0)$  とする。そうすると

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0 \tag{1.1}$$

である。

そして、座標系  $S$  では質点  $P$  に対して運動方程式

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \tag{A}$$

が成立している。

さて、(1.1) を  $t$  で微分すると

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \text{ すなわち } \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 \tag{1.2}$$

で、もちろん

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{dx_0}{dt} \text{ etc. すなわち } v_x = v'_x + v_{0x} \text{ etc.} \tag{1.3}$$

である<sup>注1)</sup>。ここで

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}: \text{ P の O に対する速度}$$

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}: \text{ P の O' に対する速度}$$

$$\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}: \text{ O' の O に対する速度}$$

である ( $\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$  を、P の  $O'$  に対する“相対速度”とも言う)。

注1) (1.1), (1.2), (1.3) 式は, 座標系  $S'$  の座標系  $S$  に対する運動が (一定方向の運動に限らず) どんな複雑な動きの運動であっても (曲線的な運動であっても) 一般的に成立している.

さて, もし, 座標系  $S'$  が座標系  $S$  に対して一定の速度  $\mathbf{v}_0$  で運動するならば, すなわち,  $\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \mathbf{v}_0 = \text{一定}$  ならば ( $t$  で積分して),

$$\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{v}_0 t \quad (t=0 \text{ で, } \mathbf{r}_0(0) = \mathbf{0} \text{ に注意}) \quad (1.4)$$

となり, このとき, (1.1), (1.2) は

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_0 t \quad (x = x' + v_{0x} t \text{ etc.}) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 = \text{一定} \quad (v_x = v'_x + v_{0x}, v_{0x} = \text{一定} \text{ etc.}) \quad (1.6)$$

となる.

(1.5) 式の  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  と  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  との間の変換 ( $\mathbf{r}$  から  $\mathbf{r}'$  への変換) を “Galilei 変換” という ((1.6) 式は, Galilei 変換の当然の帰結, ということになる).

(1.6) 式をさらに  $t$  で微分して ((1.6) 式は,  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$ ,  $\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \text{一定}$  と同じ式であることに注意)

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \text{ すなわち } \mathbf{a} = \mathbf{a}' \quad (1.7)$$

$$\left( \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}, \text{ すなわち } a_x = a'_x \text{ etc.} \right) \quad (1.8)$$

ここで,

$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \mathbf{a}' = \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}$  はそれぞれ (この順に) 質点  $P$  の座標系  $S, S'$  での加速度である.

(1.7) 式から,  $S'$  系での質点の運動方程式は

$$m \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} (= \mathbf{F}') \quad (1.9)$$

で,  $S$ 系でのそれと同型であることがわかる<sup>注2)</sup>.

つまり, “慣性系に対して等速直線運動 (等速度運動) をする座標系 (Galilei 変換で結ばれる座標系) はすべて慣性系である”. 慣性系は, 無数にあるということである.

この事実を, “ガリレイの相対原理が成立している” という.

注2) 古典力学 (ニュートン力学) では, 力は座標系に依らない物理量として定義されている. 力はその上, その作用を及ぼす“物”が必ず存在しなければならない.

例えば, 地上 (慣性系とする: 座標系  $S$ ) で静止している人と, 地上に対して等速直線運動をしている電車の中 (座標系  $S'$ ) で静止している人が物体を自然落下させたとするといずれの人も物体が鉛直に落下するのを見るだろう (図 1.2, 図 1.3). 鉛直下向きをそれぞれ  $z$  軸,  $z'$  軸に採ると運動方程式は (物体に働く力はいずれの系でも鉛直下向きの重力だけであるので)

$$\left. \begin{array}{l} \text{地上} \\ \text{(座標系 } S) \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg \\ \left( m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \right) \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \end{array} \quad (1.10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{電車の中} \\ \text{(座標系 } S') \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \frac{d^2 z'}{dt^2} = -mg \\ \left( m \frac{d^2 x'}{dt^2} = 0 \right) \\ m \frac{d^2 y'}{dt^2} = 0 \end{array} \quad (1.11)$$

となる。つまり、地上（座標系  $S$ ）と電車の中（座標系  $S'$ ）で運動方程式は同型である。

ところで、地上で静止している人が、地上に対して水平方向に等速直線運動をしている電車の中での物体の自然落下を眺めると、もちろん、鉛直真下に落下するようには見えない。電車の進行方向に、弧を描いて（実は放物線を描いて）落下していく（図 1.4）。一見すると電車の中での物体の運動法則は地上での運動法則と異なっているかのように思えるがそうではない。電車の中での落体は地上から見ると、横方向（電車の進行方向）の初速度（＝電車の速度）をもっているためこのように見えるのであって、運動方程式は同じ（(1.10) 式）である。

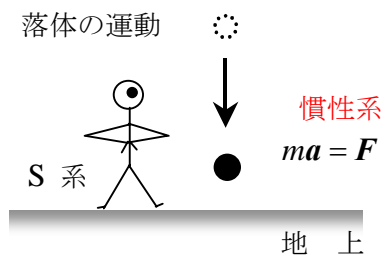


図 1.2 地上で観測する落体の運動

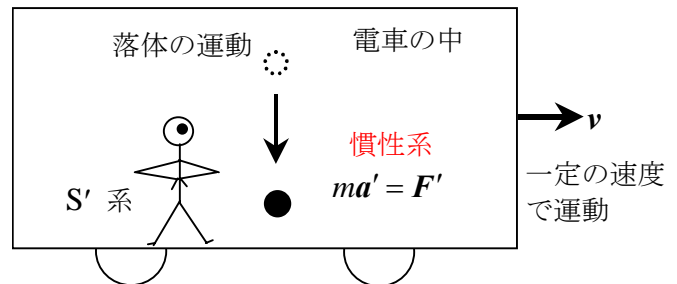


図 1.3 等速度で運動している電車の中で観測する落体の運動

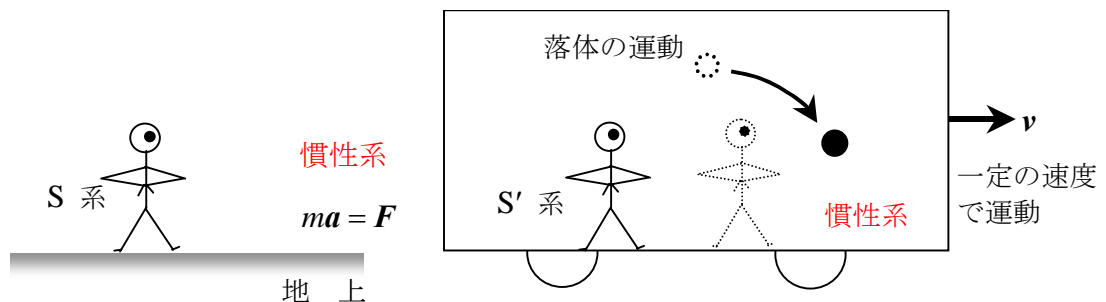


図 1.4 地上から等速度運動をする電車の中の落体の運動を観測する（水平方向の初速度がある）

## 2. 非慣性系での運動方程式

慣性系でない、すなわち、Newton の運動方程式が成り立たない座標系を非慣性系という。それは、慣性系に対して加速度運動をしている座標系で、我々が住んでいる地球上に固定された座標系はまさにそのような座標系である。というのは、地球は一定の角速度で自転しており、さらに太陽のまわりを回転運動（ほぼ正確な円運動）をしているからである。そのため地球上では、厳密な意味では、先に述べたニュートンの運動の法則は成立していない。それでは、非慣性系の運動はどのような規則に従うのだろうか？地球上は非慣性系であるからこれまでに学んだ運動方程式は全く役に立たないのだろうか？そうではない、ちょっとした修正が必要なのである。

ここでは、2.1 慣性系に対して等加速度運動をする座標系、2.2 慣性系に対して一定の角速度をもつ座標系の 2 つの場合に対してそこで成立する運動の基本方程式を導き、いくつかの例題を挙げる。

### 2.1 慣性系に対して加速度をもつが回転しない座標系

O' の O に対する速度  $\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$  が一定ではなく、 $\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} = \mathbf{a}_0 = \text{一定}$  の場合である。

(1.2) 式を  $t$  で微分して、

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} \text{ すなわち } \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0 \quad (2.1)$$

両辺に  $m$  を掛け算して  $m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$  に注意すると

$$m\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} - m\frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} \text{ あるいは } m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 \quad (\text{B})$$

これが S'系における質点 P の運動方程式である。右辺第 1 項の“真の力 (true force)”  $\mathbf{F}$  に対して右辺第 2 項の  $-m\mathbf{a}_0$  を“慣性力 (inertia force)” あるいは“見かけの力”という。

例 2.1 S'系で静止 ( $\mathbf{r}' = \text{一定}$ ) または等速度運動 ( $\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \text{一定}$ ) をしている物体。

この場合は  $\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{0}$  だから “S'系での運動方程式” は (B) から

$$\mathbf{0} = \mathbf{F} - m\frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} \text{ あるいは } \mathbf{0} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 \quad (2.2)$$

となる。つまり、真の力  $\mathbf{F}$  と慣性力  $-m\frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} (= -m\mathbf{a}_0)$  が釣り合っている。

例えば、停車駅から出発して加速しつつある新幹線の中で、人が静止または電車の進行方向に向かって一定の速さで歩こうとすれば、自分の質量×電車の加速度の大きさの慣性力を打ち消すだけの真の力を床面と靴底との摩擦力や座席の背もたれ、手すりなどから体に働かせなければならない (図 2.1, 図 2.2)。

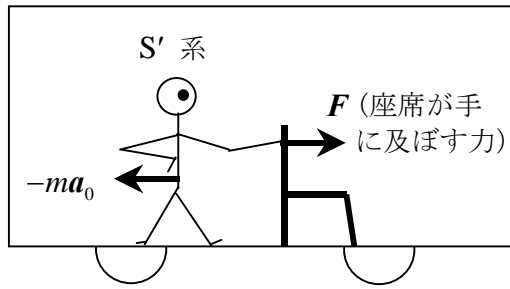


図 2.1 等加速度  $a_0$  で運動している電車の中で  
静止している物体に働く慣性力 ( $= -ma_0$ )

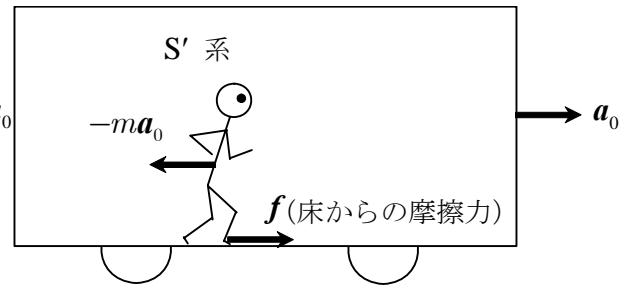


図 2.2 等加速度  $a_0$  で運動している電車の中で  
等速度で運動している物体に働く慣性力  
( $= -ma_0$ )

真の力と慣性力が釣り合っている例をもう 1 つ挙げよう．電車やバスが一定の加速度  $a_0$  で動き始めた（あるいは停止しようとした）ときの電車や，乗り合いバスに取り付けられているつり革（電車やバスの加速，減速時などに体を支えるための吊り輪）に働いている力を考えよう（図 2.3，図 2.4）．

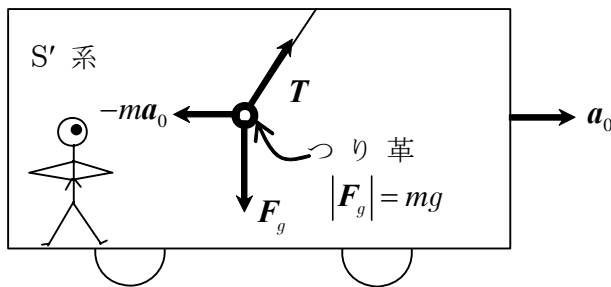


図 2.3 等加速度  $a_0$  で運動している電車の中  
で静止しているつり革に働く力

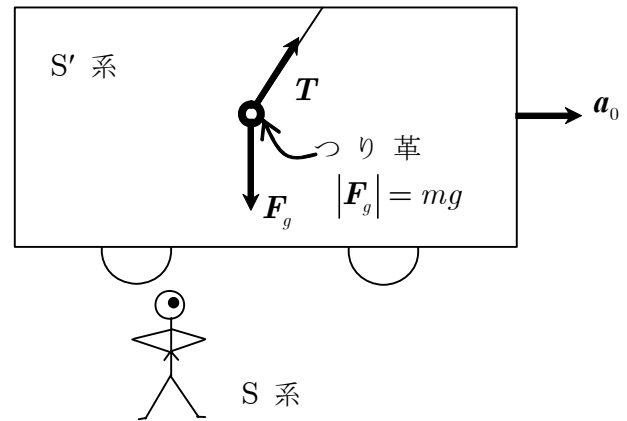


図 2.4 等加速度  $a_0$  で運動している電車の中  
のつり革に働く力を地上から観測する

この電車やバスのつり革は，図 2.3，図 2.4 のように鉛直方向に対して傾いて静止する．つり革の取っ手の部分（質点と考える）の質量を  $m$  とすると，電車やバスに乗っている人（ $S'$  系）から見れば，この部分には重力  $F_g$  ( $|F_g| = mg$ )，つり革の張力  $T$ ，そして慣性力  $-ma_0$  が作用し，釣り合っているように見える（図 2.3）．すなわち，

$$0 = F_g + T - ma_0 \quad (2.3)$$

ところで，電車の外で静止している人（ $S$  系）はこのつり革の状態をどう説明すればよいのだろうか？ 以下のように言えばよい：

つり革の取っ手の部分は運動方程式

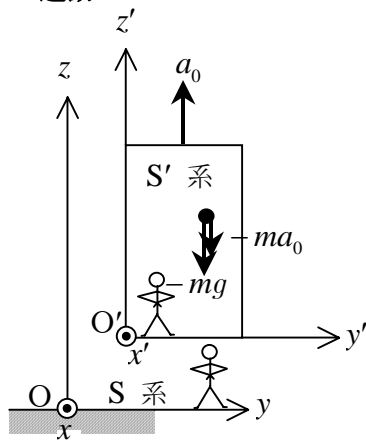
$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = F_g + T \quad \text{あるいは} \quad m \mathbf{a} = F_g + T \quad (2.4)$$

を満足する. したがってつり革の取っ手の部分はこれに作用している重力  $F_g$  と張力  $T$  の合力によって (実際には  $T$  の乗り物の進行方向の成分によって) 加速され, 加速度

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{F}_g + \mathbf{T}}{m} \quad (2.5)$$

で運動している. もちろん, 慣性力  $-m\mathbf{a}_0$  は作用していない (図 2.4).

**例 2.2** 一定の加速度  $a_0$  で上昇 ( $a_0 > 0$ ) または下降 ( $a_0 < 0$ ) しつつあるエレベータ内での落体の運動



地上に固定された座標系を慣性系であるとし, 鉛直の向きに  $z, z'$  軸を選ぶ (図 2.5).

エレベータに固定された座標系での運動方程式 (“S'系での運動方程式”) は

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 z'}{dt^2} &= -mg - ma_0 \\ &= -m(g + a_0) \end{aligned} \quad (2.6)$$

(もちろん,  $x'$  軸,  $y'$  軸方向の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y'}{dt^2} = 0 \quad \text{である})$$

図 2.5 一定の加速度  $a_0$  で上昇または下降しつつあるエレベータ内での落体の運動

すなわち, エレベータに乗っている人は, 物体は重力以外に慣性力  $-ma_0$  の作用を受けていると観測する. つまり, 重力加速度の大きさが  $g + |a_0|$  (上昇時),  $g - |a_0|$  (下降時) になったと感ずる.

**2.2 慣性系に対して一定の角速度をもつ座標系**

慣性系  $S$  と原点と  $z$  軸を共有し, 軸の周りに一定の角速度  $\omega$  で回転している座標系  $S'$  (回転座標系) で見た質点の運動方程式を導こう (図 2.6).

時刻  $t=0$  で  $S, S'$  の座標軸が一致していたとする. そうすると, 運動している質点  $P$  の時刻  $t=t$  でのそれぞれの座標系での位置座標  $(x, y, z), (x', y', z')$  間の関係式は

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \omega t + y \sin \omega t \\ y' &= -x \sin \omega t + y \cos \omega t \\ z' &= z \end{aligned} \right\} \quad \text{逆に,} \quad \left. \begin{aligned} x &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \\ y &= x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \\ z &= z' \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$



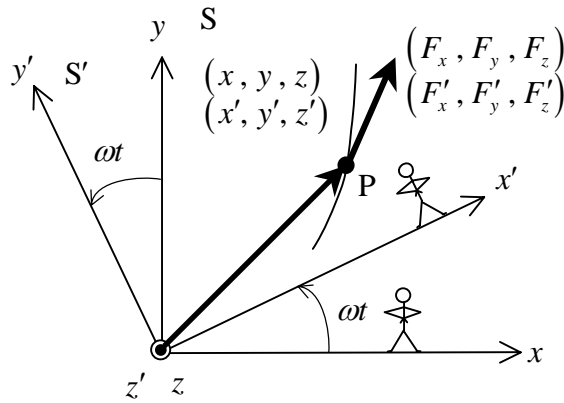


図 2.6 座標系 S (慣性系) と、座標系 S に対して一定の角速度  $\omega$  で回転する座標系 S'

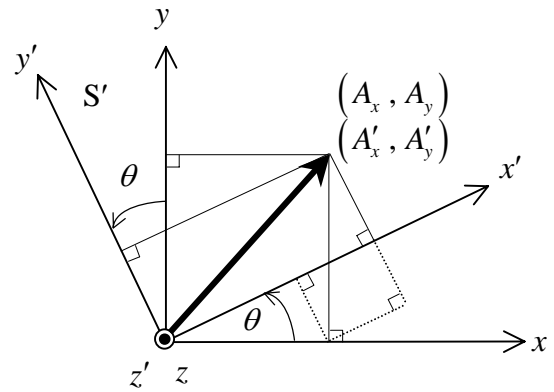


図 2.7 座標系 S (慣性系) と、座標系 S に対して一定の角速度  $\omega$  で回転する座標系 S' (回転座標系) でのベクトルの成分

これらの関係式 (の  $(x, y), (x', y')$  間の変換式) は、任意のベクトル  $\mathbf{A}$  を、直交座標系で表示した成分  $(A_x, A_y)$  と、この座標系と  $z$  軸を共有し、 $z$  軸の周りに角  $\theta$  だけ回転した直交座標系で表示した成分  $(A'_x, A'_y)$  との関係式

$$\left. \begin{aligned} A'_x &= A_x \cos \theta + A_y \sin \theta \\ A'_y &= -A_x \sin \theta + A_y \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad \text{逆に,} \quad \left. \begin{aligned} A_x &= A'_x \cos \theta - A'_y \sin \theta \\ A_y &= A'_x \sin \theta + A'_y \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

で  $(A_x, A_y) = (x, y)$ ,  $(A'_x, A'_y) = (x', y')$ ,  $\theta = \omega t$  とおけば得られる。(2.8) 式は、図 2.7 を参照すれば容易に理解できるであろう。

さて、(2.7) 式の第 2 式を時刻  $t$  で 2 回微分すると ( $t$  に関して 2 次の導関数を求めると)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \left( \frac{d^2 x'}{dt^2} - 2\omega \frac{dy'}{dt} - x'\omega^2 \right) \cos \omega t - \left( \frac{d^2 y'}{dt^2} + 2\omega \frac{dx'}{dt} - y'\omega^2 \right) \sin \omega t \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \left( \frac{d^2 x'}{dt^2} - 2\omega \frac{dy'}{dt} - x'\omega^2 \right) \sin \omega t + \left( \frac{d^2 y'}{dt^2} + 2\omega \frac{dx'}{dt} - y'\omega^2 \right) \cos \omega t \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{d^2 z'}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

(2.9) 式の第 1 式と第 2 式は、慣性系での質点の加速度の各成分を、慣性系に対して角速度で回転している座標系での物理量 (位置座標  $(x', y')$ , 速度  $\left(\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}\right)$ , 加速度  $\left(\frac{d^2 x'}{dt^2}, \frac{d^2 y'}{dt^2}\right)$ ) で表した式である。それほど単純ではないことがわかるであろう。

ところで、 $S$  系での運動方程式  $m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x$  etc. の、右辺の力の成分を回転する座標系での成分で表すと、(2.7) 式 (の第 2 式) と同型の式が成立するはずだから

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F'_x \cos \omega t - F'_y \sin \omega t \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= F'_x \sin \omega t + F'_y \cos \omega t \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= F'_z \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

(2.9) 式の両辺に  $m$  を掛けて (2.10) 式と比較すれば回転している座標系  $S'$  (回転座標系) での

運動方程式が得られて  $\left[ m \left( \frac{d^2x'}{dt^2} - 2\omega \frac{dy'}{dt} - x'\omega^2 \right) = F'_x \text{ etc. だから} \right]$

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x'}{dt^2} &= F'_x + m\omega^2 x' + 2m\omega \frac{dy'}{dt} \\ m \frac{d^2y'}{dt^2} &= F'_y + m\omega^2 y' - 2m\omega \frac{dx'}{dt} \\ m \frac{d^2z'}{dt^2} &= F'_z \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

となる。(2.11) 式は、位置ベクトル

$$\mathbf{r}' = \rho + z'\mathbf{k} \quad \text{ただし, } \rho = (x', y', 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1) \quad (2.12)$$

と、速度ベクトル

$$\mathbf{v}' = \left( \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt} \right) \quad (2.13)$$

を用いて 1 つの式で表すとすっきりと見通しの良い形に書ける。すなわち、

$$m \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F}' + m\omega^2 \rho - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (C)$$

ただし、 $\boldsymbol{\omega}$  は、大きさ  $\omega$  , 向きは回転軸の向き ( $z$  軸の正の向き) をもったベクトルである (図 2.8) .

図 2.8 座標系  $S'$  (回転座標系) で観測される慣性力 (遠心力, コリオリの力)

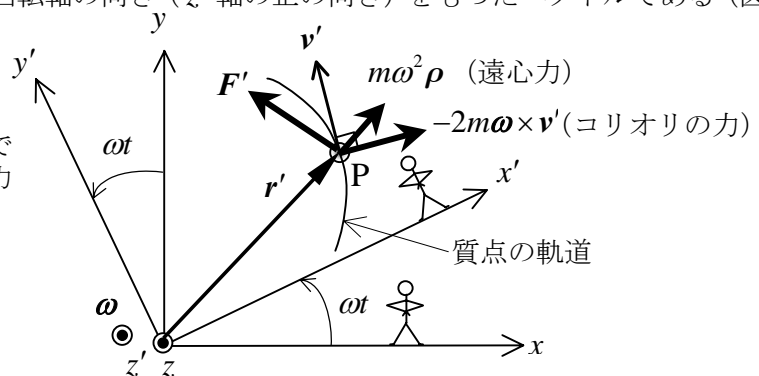


図 2.8 で、 $\mathbf{F}'$  は真の力であり、 $m\omega^2\tilde{\mathbf{r}}'$  は遠心力、 $-2m\boldsymbol{\omega}\times\tilde{\mathbf{v}}'$  はコリオリ (Coliolis) の力と呼ばれる。遠心力とコリオリの力が回転座標系で観測される慣性力である。

(C) 式は、 $\tilde{\mathbf{r}}'=(x', y')$  と  $z'$  に関する 2 つの式で表すと

$$\left. \begin{aligned} m\frac{d^2\tilde{\mathbf{r}}'}{dt^2} &= \tilde{\mathbf{F}}' + m\omega^2\tilde{\mathbf{r}}' - 2m\boldsymbol{\omega}\times\tilde{\mathbf{v}}' \\ m\frac{d^2z'}{dt^2} &= F'_z \end{aligned} \right\} \quad (\text{C})'$$

となる。ただし、 $\tilde{\mathbf{F}}'=(F'_x, F'_y)$ 、 $\tilde{\mathbf{v}}'=(v'_x, v'_y)$  である。

もちろん、 $m\omega^2\tilde{\mathbf{r}}'$  が遠心力、 $-2m\boldsymbol{\omega}\times\tilde{\mathbf{v}}'$  がコリオリ (Coliolis) の力である (詳しくは例 6 を見よ)。

以後の例では、混乱のない限り  $\tilde{\mathbf{r}}'$ 、 $\tilde{\mathbf{v}}'$  を  $\mathbf{r}'$ 、 $\mathbf{v}'$  と書く。さらに回転座標系のみを扱う場合には  $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{v}$  と書く。

### 例 2.3 人工衛星に作用している力

地球のまわりを回転する人工衛星が地球に落下しない理由を、人工衛星内の観測者はどう説明すればよいか？

地球の中心に原点を置き、地軸 (自転軸) を  $z$  軸とし、他の 2 つの座標軸の内 1 本 (例えば  $x$  軸) を常に太陽の向きに固定され、地球とともに太陽のまわりを公転する座標系を慣性系と見なせば、人工衛星に固定された座標系は一定の角速度で回転する座標系であると見なして良いだろう。このことを理解した人工衛星内の観測者は自分が乗っている人工衛星が真の力として地球の万有引力のみを受けているのに地球に落下しないのは慣性力である遠心力と万有引力がつり合っているからであると説明できる (以後の説明は、付録を参照せよ。付録で用いた記号  $\mathbf{r}'$  は、ここでは  $\mathbf{r}$  と書く)。

すなわち、地球の質量を  $M$ 、人工衛星の質量を  $m$ 、地球と人工衛星の距離を  $r$ 、万有引力定数を  $G$  とし、人工衛星が地球のまわりを回転する角速度を  $\omega$  とすると、人工衛星が地球から受ける万有引力の大きさは  $GMm/r^2$ 、人工衛星に作用する遠心力は  $m\omega^2 r$  であるがこれらが等しい (付録の (A10) 式を見よ)。

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\omega^2 r \quad (2.14)$$

と理解する (図 2.9)。

一方、地球上の観測者は、人工衛星は地球の万有引力を向心力として地球のまわりを向心加速度  $r\omega^2$  で円運動しているのである、と理解する (図 2.10)。

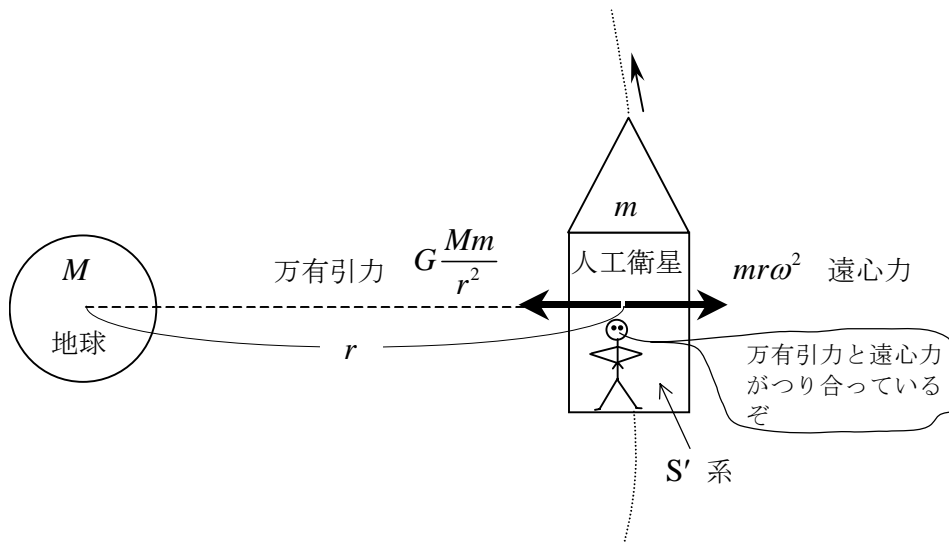


図 2.9 人工衛星内（回転座標系）の人が観測する人工衛星に働く力

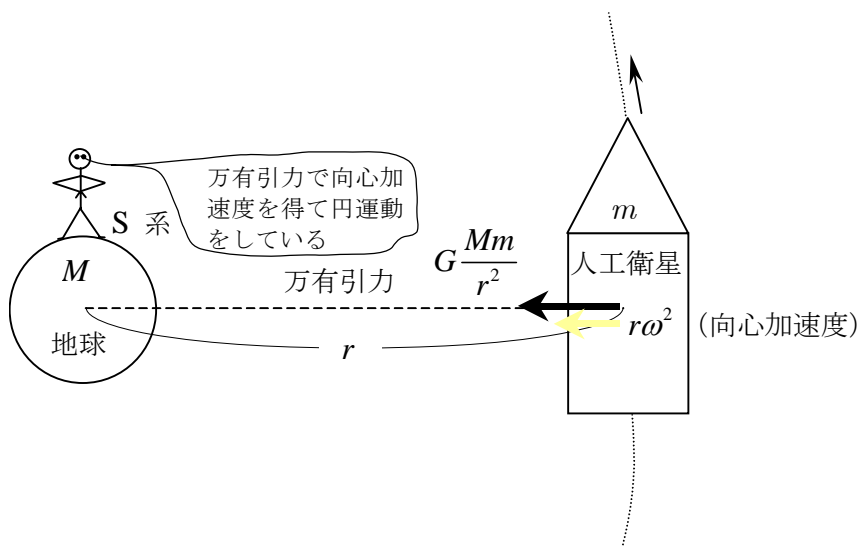


図 2.10 地球上（慣性系）の人が観測する人工衛星に働く力

## 例 2.4 重力定数 $g$

地球上の物体に作用する重力は、地球が物体におよぼす万有引力と地球の自転による遠心力の合力であるから緯度によって異なる。それは、重力定数  $g$  の緯度による違いとなる。緯度  $\theta$  における重力定数  $g(\theta)$  の値を計算しよう。

地球の各点は、慣性系に対して角速度  $\omega$  の回転座標系であると考え。これは、太陽に固定された座標系は慣性系であり、地球の太陽のまわりを公転の影響を考慮しない、無視するということである（公転軌道は、ほぼ円であり、公転運動している地球は、自転の影響を無視したとしても厳密な意味では慣性系ではない）。

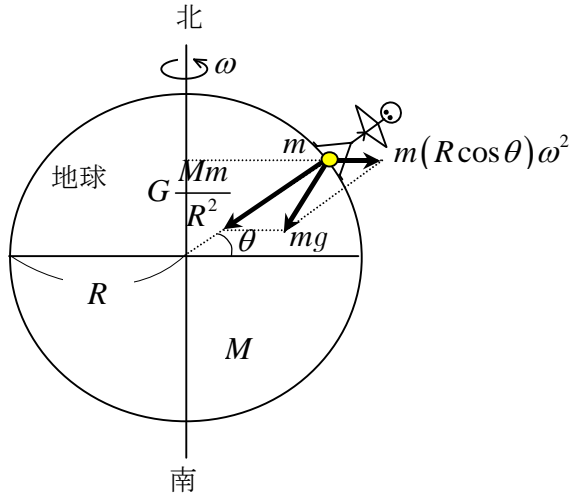


図 2.11 地上の静止物体に働く力は万有引力と遠心力である。これらの合力が重力

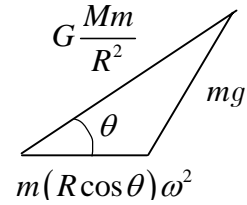


図 2.12 力の三角形

図 2.11 から (図 2.12 を参照して), 地球の質量を  $M$ , 半径を  $R$ , 万有引力定数を  $G$ , 地球の自転の角速度を  $\omega$  とすると, 緯度の地球表面におかれた質量の物体に作用する重力の大きさ  $mg$  は, 万有引力  $G M m / r^2$  と遠心力  $m R \cos \theta \omega^2$  の合力の大きさとして

$$mg = \sqrt{\left(G \frac{Mm}{R^2}\right)^2 + (mR \cos \theta \omega^2)^2 - 2G \frac{Mm}{R^2} \cdot mR \cos \theta \omega^2 \cdot \cos \theta} \quad (2.15)$$

となる。したがって

$$g = \sqrt{\left(G \frac{M}{R^2}\right)^2 + (R \cos \theta \omega^2)^2 - 2G \frac{M}{R^2} \cdot R \cos^2 \theta \omega^2} \quad (2.16)$$

さらに

$$G \frac{M}{R^2} = g_0 \quad (2.17)$$

とおくと

$$g = \sqrt{g_0^2 + (R \cos \theta \omega^2)^2 - 2g_0 R \cos^2 \theta \omega^2} = g_0 \sqrt{1 + \left(\frac{R \omega^2}{g_0}\right)^2 \cos^2 \theta - 2\left(\frac{R \omega^2}{g_0}\right) \cos^2 \theta} \quad (2.18)$$

となる。

$$\omega = \frac{2\pi}{60 \times 60 \times 24} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ [rad/s]}, \quad R = 6.38 \times 10^6 \text{ [m]}, \quad M = 5.974 \times 10^{24} \text{ [kg]}$$

$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ [N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}]$  を用いると,

$$g_0 = G \frac{M}{R^2} = 9.79 \text{ [m/s}^2\text{]}, R\omega^2 = 0.034 \text{ [m/s}^2\text{]} \text{ だから, } \frac{R\omega^2}{g_0} = \frac{0.034}{9.79} \approx 3.5 \times 10^{-3} \text{ で,}$$

$\left(\frac{R\omega^2}{g_0}\right)^2$  は  $\frac{R\omega^2}{g_0}$  に比べて十分小さい. そこで, (2.18) 式で,  $\left(\frac{R\omega^2}{g_0}\right)^2$  を省略すると,

$$g = g_0 \sqrt{1 - 2 \left(\frac{R\omega^2}{g_0}\right) \cos^2 \theta} = g_0 \left(1 - 2 \left(\frac{R\omega^2}{g_0}\right) \cos^2 \theta\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

となり, さらに,  $|x| \ll 1$  のときに成り立つ近似式  $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$  を用いると

$$g = g_0 - R\omega^2 \cos^2 \theta = (9.79 - 0.034 \cos^2 \theta) \text{ [m/s}^2\text{]} \quad (2.20)$$

上の式によれば, 極地の重力加速度の大きさは  $9.79 \text{ [m/s}^2\text{]}$ , 赤道上でのそれは極地よりも  $0.034 \text{ [m/s}^2\text{]}$  だけ小さい. しかし, 実測値は極地 (南極) で  $g = 9.83 \text{ [m/s}^2\text{]}$ , 赤道上でのそれは極地よりも  $0.051 \text{ [m/s}^2\text{]}$  小さく, 合わない, これは, 地球は完全な球体ではなく極軸の方向にややつぶれた回転楕円体だからである.

## 例 2.5 円錐振り子

長さ  $l$  の糸の一端を,  $O$  に固定し, 他端  $P$  に質量  $m$  のおもりをつけ, 糸が鉛直下方と一定の角  $\theta$  を保つように,  $P$  を水平面上で一定の角速度で回転させる.

これを円錐振り子というが, この運動を, 慣性系と回転座標系で調べてみよう.

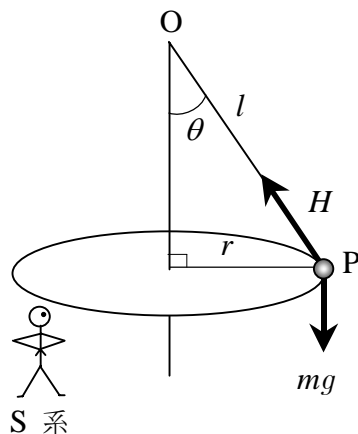


図 2.13 座標系 S (慣性系) でおもりに働く力を観測する

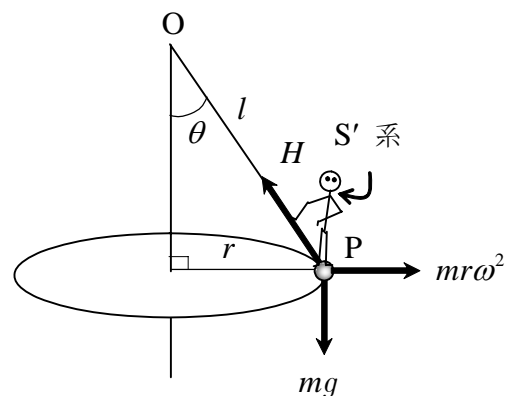


図 2.14 座標系 S' (回転座標系) でおもりに働く力を観測する

おもりの質量を  $m$ , 糸の張力を  $H$ , 回転の角速度を  $\omega$  とすると (この問題で与えられた物理量は  $l, \theta, g$  のみであることに注意) 図 2.13 から, 慣性系での運動方程式 (質量  $\times$  加速 = 力)

は（円周の法線の内向き，鉛直上向きを正の向きとして）

$$\left. \begin{array}{l} \text{水平方向：} \quad mr\omega^2 = H \sin \theta \\ \text{鉛直方向：} \quad 0 = H \cos \theta - mg \end{array} \right\} \quad (2.21)$$

一方，回転座標系での運動方程式は（回転座標系では，おもりは水平方向にも静止しているので）（図 2.14），(C) 式あるいは (C)' 式から（円周の法線の内向き，鉛直上向きを正の向きとして．付録の (A10) 式も参照せよ）

$$\left. \begin{array}{l} \text{水平方向：} \quad 0 = H \sin \theta - mr\omega^2 \\ \text{鉛直方向：} \quad 0 = H \cos \theta - mg \end{array} \right\} \quad (2.22)$$

質量  $m$  の質点は，回転座標系で静止しているのでコリオリの力は無いことに注意．

いずれの場合も，2 つの式から  $H$  を消去すれば， $\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}}$ ．したがって，一回転する時間，すなわち周期  $T$  は，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}} \quad (2.23)$$

### 例 2.6\*) 回転平面上を滑る物体に働くコリオリの力

図 2.15 のように，鉛直な回転軸の周りに一定の角速度  $\omega$  で回転する平面（メリーゴーランドを想像するとよい）がある．平面と回転軸との交点を  $O$  とする．この平面上で，時刻 0 に物体を点  $P$  から点  $O$  に向かって初速度  $v_0$  で滑らせた． $\overline{OP} = r$  とする（図 2.15）．時刻  $t$  後の物体の位置を求めよ．ただし，平面と物体との間には摩擦はないとする．

まず慣性系で考える：

回転する平面上の点  $P$  と， $OP$  上で点  $P$  から  $v_0 t$  だけ離れた点  $Q$  は，時刻  $t$  後には  $\omega t$  だけ回転してそれぞれ点  $P'$ ，点  $Q'$  に達する．一方物体は，弧  $\widehat{PP'}$  の接線方向に大きさ  $r\omega$  の初速度が与えられるので時刻  $t$  に物体は点  $R$  に達する．

図 2.15 から， $\angle RQQ' = \frac{\omega t}{2}$ ．よって

$$\begin{aligned} \overline{Q'R} &= \sqrt{\overline{QQ'}^2 + \overline{QR}^2 - 2\overline{QQ'} \cdot \overline{QR} \cos \frac{\omega t}{2}} \\ &= \sqrt{\left\{ 2(r - v_0 t) \sin \frac{\omega t}{2} \right\}^2 + (r\omega t)^2 - 2 \cdot 2(r - v_0 t) \sin \frac{\omega t}{2} \cdot r\omega t \cdot \cos \frac{\omega t}{2}} \\ &= \sqrt{4(r - v_0 t)^2 \cdot \frac{1 - \cos \omega t}{2} + r^2 (\omega t)^2 - 2r(r - v_0 t)(\omega t) \sin \omega t} \end{aligned} \quad (2.24)$$

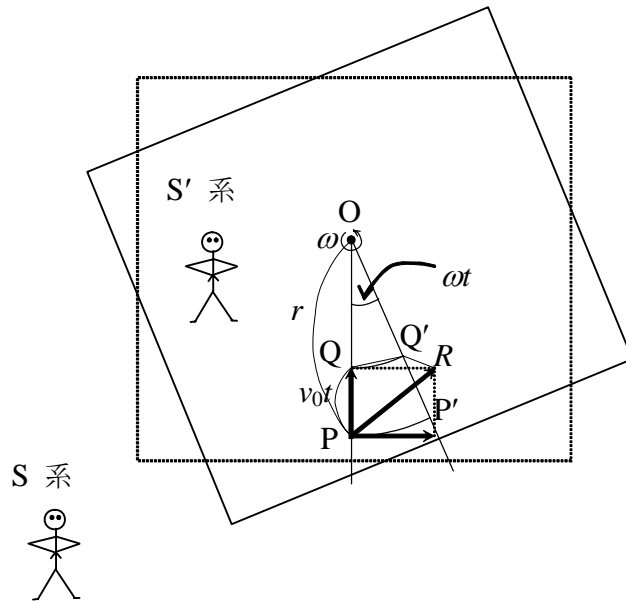


図 2.15 座標系 S (慣性系) に対して角速度  $\omega$  で回転する平板上 (回転座標系 S') を回転の中心に向かって初速度  $v_0$  で滑らせた物体を座標系 S (慣性系) で観測する

図 2.15 からわかるように, この運動を回転座標系で眺めると, 時刻 0 に点 P から点 O に向かって滑らせた物体は, もし座標系が回転しなければ時刻  $t$  には点 Q' に達するはずであるが (回転座標系では点 P と点 P', 点 Q と点 Q' は同じ点であることに注意), P' → Q' の向きから見て点 Q' の右方 (この状況は  $\omega t$ ,  $v_0 t$ ,  $r$  の大小によって異なる) の点 R に (2.24) 式で与えられる距離だけずれる.

さて,  $\omega t \ll 1$ ,  $\frac{v_0 t}{r} \ll 1$  とし,  $\overline{Q'R}$  を  $\omega t$ ,  $\frac{v_0 t}{r}$  の 1 次の項まで求めると

$$\begin{aligned}
 \overline{Q'R} &= \sqrt{2(r-v_0t)^2 \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{1}{2}(\omega t)^2 + \dots \right) \right\} + r^2(\omega t)^2 - 2r(r-v_0t)\omega t \left\{ \omega t - \frac{1}{6}(\omega t)^3 \dots \right\}} \\
 &= \sqrt{2(r-v_0t)^2 \left( \frac{1}{2}(\omega t)^2 + \dots \right) + r^2(\omega t)^2 - 2r(r-v_0t)\omega t(\omega t - \dots)} \\
 &= \sqrt{(r-v_0t)^2(\omega t)^2 + r^2(\omega t)^2 - 2r(r-v_0t)(\omega t)^2 + \dots} \\
 &= \sqrt{r^2(\omega t)^2 \left( 1 - \frac{v_0t}{r} \right)^2 + r^2(\omega t)^2 - 2r^2(\omega t)^2 \left( 1 - \frac{v_0t}{r} \right) + \dots} \\
 &= r(\omega t) \sqrt{\left( 1 - 2\frac{v_0t}{r} + \left( \frac{v_0t}{r} \right)^2 \right) + 1 - 2\left( 1 - \frac{v_0t}{r} \right) + \dots} \\
 &= r(\omega t) \sqrt{\left( 1 - 2\frac{v_0t}{r} + \left( \frac{v_0t}{r} \right)^2 \right) + 1 - 2\left( 1 - \frac{v_0t}{r} \right) + \dots}
 \end{aligned}$$



$$= r(\omega t) \sqrt{\left(\frac{v_0 t}{r}\right)^2 + \dots} \quad (2.25)$$

(2.25) 式の  $\sqrt{\quad}$  の中の  $\dots$  は,  $(\omega t)^2, \left\{\frac{v_0 t}{r}, \left(\frac{v_0 t}{r}\right)^2\right\} \times \{(\omega t)^2, (\omega t)^4, (\omega t)^6, \dots\}$

の形の式を含んだ項である. よって

$$\overline{Q'R} \approx (\omega t)(v_0 t) \quad (2.26)$$

(2.26) 式は,  $\omega t \ll 1$ ,  $\frac{v_0 t}{r} \ll 1$  のとき, この問題を次のように考えればよいことを暗示している. すなわち, 図 2.15 の運動の状況図を図 2.16 のように考えてよいということである:

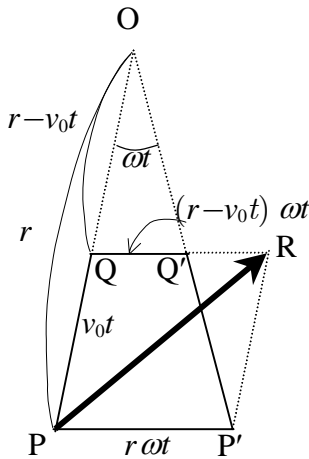


図 2.16 の説明は不用であろう.

$$\overline{Q'R} = \overline{QR} - \overline{QQ'} = r\omega t - (r - v_0 t)\omega t = (v_0 t)(\omega t)$$

となって (2.26) 式と一致する (点  $P'$  から見て線分  $QQ'$  の延長上の点  $Q'$  の右方の点  $R$  までの距離).

さて, (2.24) 式あるいは (2.26) 式は, 回転座標系から見れば, 遠心力  $m\omega^2 \mathbf{r}$  とコリオリの力  $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$  が作用した結果だと考えられる ( $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{v}'$  の, ' は省く).

図 2.16 図 2.16 の四辺形  $PQQ'P'$  の台形近似

実際にそうであるということを示そう.  $\omega t \ll 1$ ,  $\frac{v_0 t}{r} \ll 1$  の場合に示そう.

コリオリの力は  $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$  であるが, 上の条件の下では時刻  $0 \sim t$  で  $\mathbf{v}$  の大きさ, 向きはほとんど一定で ( $\mathbf{v}$  は, ほとんど  $P \rightarrow O$  あるいは  $P' \rightarrow O$  の向きなので)  $OP$  に垂直, すなわち,  $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_0$  と考えてよい. したがって, その大きさは

$$|-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}| \approx |-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0| = 2m\omega v_0 \sin \frac{\pi}{2} = 2m\omega v_0 \quad (2.27)$$

また, 遠心力  $m\omega^2 \mathbf{r}$  は,  $O \rightarrow P$  の向きで, 変位  $\overline{Q'R}$  は今の場合 (上の条件の下では)  $O \rightarrow P$  の向きに垂直であると考えてよいので, この変位に遠心力の寄与は考えなくてもよい ( $\omega$  自体が小さく,  $\omega^2$  の寄与は省略すると考えてよい).

そうすると  $\overline{Q'R}$  の方向の加速度の大きさ  $a$  は

$$a = \frac{2m\omega v_0}{m} = 2\omega v_0$$

よって, 時刻  $t$  での変位の大きさ  $\overline{Q'R}$  は

$$\overline{Q'R} = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\omega v_0 \cdot t^2 = (v_0 t)(\omega t) \quad (2.28)$$

となって(2.26) 式と一致する． コリオリの力のイメージがつかめただろうか？

**例 2.7\*) 地球上で地面に水平に北に向かって投げた物体に働くコリオリの力**

北半球の緯度  $\theta$  (北緯  $\theta$ ) で地面に水平に真北に向かって初速度  $v_0$  で投げた物体の時間  $t$  後の位置変化はいくらか． ただし，地球の自転の角速度を  $\omega$  とし，  $\omega t \ll 1$  とする．

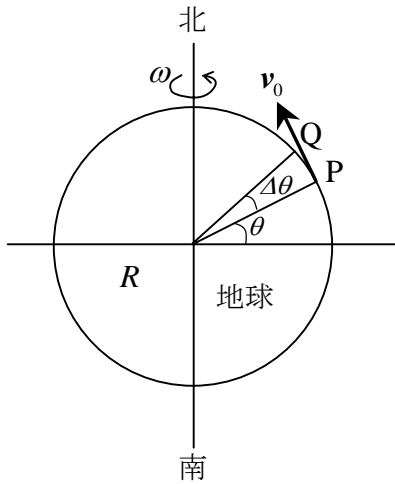


図 2.17 北緯  $\theta$  で物体を初速度  $v_0$  で真北に投げる

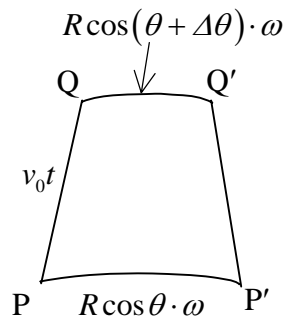


図 2.18 初速度  $v_0$  で真北に投げられた物体を真東から見る

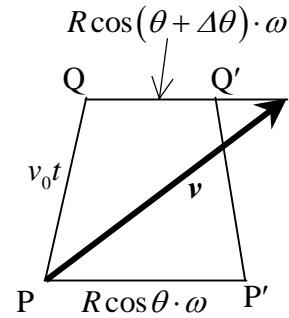


図 2.19 図 2.18 の台形近似

例 2.6 に習って， 図 2.19 から

$$\begin{aligned} \overline{Q'R} &= \overline{QR} - \overline{QQ'} = \{R \cos \theta - R \cos(\theta + \Delta\theta)\} \cdot \omega \\ &= R(\cos \theta - \cos \theta \cos \Delta\theta + \sin \theta \sin \Delta\theta) \cdot \omega \end{aligned} \quad (2.29)$$

$\Delta\theta = \frac{\widehat{PQ}}{R} = \frac{v_0 t}{R} \ll 1$  であることを考慮して，  $\overline{Q'R}$  を  $\Delta\theta$  の 1 次まで近似すると．

$$\begin{aligned} \overline{Q'R} &\approx R \left\{ \cos \theta - \cos \theta \left( 1 - \frac{1}{2}(\Delta\theta)^2 \right) + \sin \theta \left( \Delta\theta - \frac{1}{6}(\Delta\theta)^3 \right) \right\} \cdot \omega \\ &\approx R \sin \theta \cdot \Delta\theta \cdot \omega = R \sin \theta \cdot \frac{v_0 t}{R} \cdot \omega = (\omega t)(v_0 t) \sin \theta \end{aligned} \quad (2.30)$$

ところで，  $\omega t \ll 1$  のとき， 時刻  $0 \sim t$  では  $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_0$  だから北緯  $\theta$  で質量  $m$ ， 速度  $\mathbf{v}$  の物体に作用するコリオリの力は  $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \approx -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0$  で， 図 2.17 からわかるように， 大きさ  $= |-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}| \approx |-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0| = 2mv_0\omega \sin \theta$ ， 向きは東向きである． したがって， (2.28) 式と同様に，

$$\overline{Q'R} = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\omega v_0 \sin \theta \cdot t^2 = (\omega t)(v_0 t) \sin \theta \quad (2.31)$$

となって、この変位が地球の自転によって生じるコリオリの力によるものとして説明できた。

詳しい説明は省くが、コリオリの力は、地球の気候に大きく関わっている。例えば、日本列島付近では、天気は西から東に変化するが、これは気団が西から東に移動するからで、このことにコリオリの力が寄与しているといわれている。また、赤道付近の暖気が北極あたりにまで流れていくがこれもこの力に依ると考えられている。そして、台風が赤道あたりから北上し、風が低気圧の中心に向かって左巻きに吹き込むのはこの力の作用による。

## まとめ

高校や大学初年度の力学の問題を解くための知識としては必要以上の内容を解説したように思えるが、興味を持つ読者がおられれば幸いである。特に、コリオリの力に関しては、私が見る限り、詳しく解説した教科書、参考書が見あたらないので詳しく記した。

さて、通常の教科書や参考書に出題されている力学の問題を解くには

1. 自分が依って立つ座標系が何であるか見極める
2. 先ず、慣性系で考えてみる
3. その後、都合のよい座標系（慣性系か非慣性系か）を選ぶ

## 参考文献

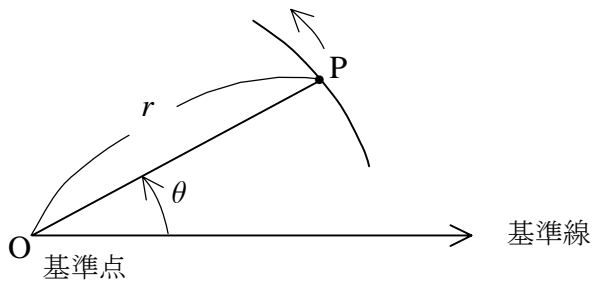
- [1] 原 康夫, 第3版 基礎物理学, 学術図書出版社, 2006年
- [2] 金原 寿郎他, 第29版, 基礎物理学, 裳華房, 1979年

## 付録 A： 極座標，極座標と直交座標，極座標による運動表示

平面上の運動を考察する場合には，これまで述べてきた直交座標よりも極座標で議論する方が便利な場合がある（例えば円運動）．そこで，極座標のおさらいと，極座標による運動表示（速度，加速度を極座標で表し，運動方程式を極座標表示で書くこと）について整理しておこう．

### 1. 極座標

平面上を運動する質点の位置を  $P$  とする．



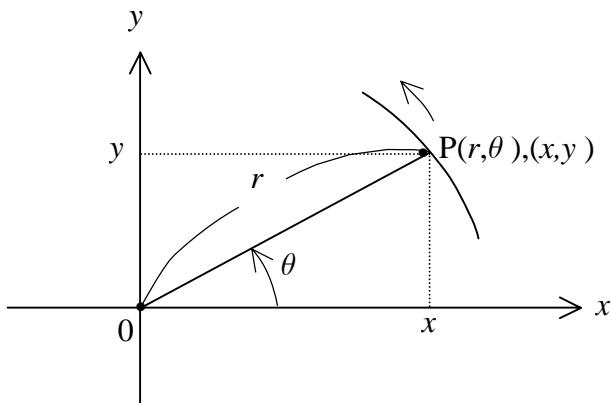
点  $P$  の位置は  $r, \theta$  を用いても表せる．

すなわち

$$P(r, \theta)$$

この  $(r, \theta)$  を点  $P$  の“極座標”という．

### 2. 極座標と直交座標の関係



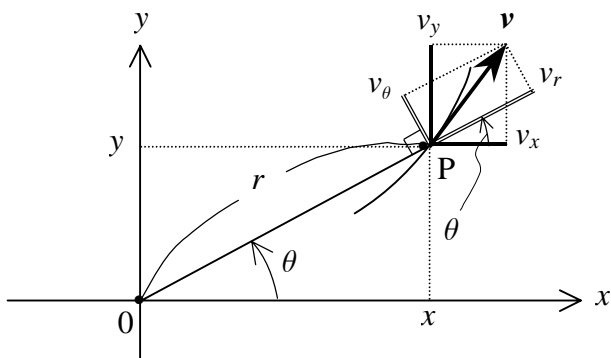
極座標の基準点，基準線をそれぞれ直交座標の原点， $x$  軸に選ぶと（ $y$  軸は当然  $x$  軸に垂直にとる）

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1})$$

逆に

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2})$$

### 3. 極座標による運動の表示



速度，加速度の  $r$  成分（位置ベクトル  $r$  方向の成分）， $\theta$  成分（位置ベクトル  $r$  に垂直な方向の成分）が  $r, \theta$  の関数としてどのように表せるかを考える．

まず，左図から

$$\left. \begin{aligned} v_r &= v_x \cos \theta + v_y \sin \theta \\ v_\theta &= -v_x \sin \theta + v_y \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3})$$

逆に

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \\ v_y &= v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4})$$

加速度の成分  $(a_r, a_\theta)$  と  $(a_x, a_y)$  との関係式も (A3), (A4) と同形である. (A3), (A4) は, 本文の (2.8) 式と同型であることに注意.

さて,

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A5})$$

(A5) を (A3) に代入するか, あるいは (A5) と (A4) を直接比較して

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{dr}{dt} \\ v_\theta &= r \frac{d\theta}{dt} \left( = r\omega \text{ ただし, } \omega = \frac{d\theta}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A6})$$

また, 加速度に関しても同様に

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} \cos \theta - \left\{ r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right\} \sin \theta \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} \sin \theta + \left\{ r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right\} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A7})$$

であり ( $a_y$  の表式は  $a_x$  の表式で  $\theta \rightarrow \theta - \frac{\pi}{2}$  の置き換えをすれば直ちに得られる), 速度の場合と同様に, (A7) を (A3) (で  $v$  を  $a$  に書き換えた式) に代入するか, あるいは (A7) と (A4)

(で  $v$  を  $a$  に書き換えた式) を直接比較して

$$\left. \begin{aligned} a_r &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ a_\theta &= r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A8})$$

が得られる.

(a) 慣性系での運動方程式

(A8) から, 慣性系での極座標表示での質量  $m$  の質点の運動方程式は,  $F = (F_r, F_\theta)$  とする  
と

$$\left. \begin{aligned} r \text{ 方向 : } & m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} = F_r \\ \theta \text{ 方向 : } & m \left\{ r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right\} = F_\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A9})$$

例1. 円運動 (等速とは限らない) をする質点

$r = \text{一定}$  だから (A9) は

$$\left. \begin{aligned} r \text{ 方向 : } & -mr \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = F_r \left( \text{あるいは } -mr\varpi^2 = F_r \text{ あるいは } -m \frac{v_\theta^2}{r} = F_r \right) \\ \theta \text{ 方向 : } & mr \frac{d^2 \theta}{dt^2} = F_\theta \left( \text{あるいは } mr \frac{d\varpi}{dt} = F_\theta \text{ あるいは } m \frac{dv_\theta}{dt} = F_\theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A10})$$

ただし,  $\varpi = \frac{d\theta}{dt}$  ( $\varpi$  は, 本文中の一定の角速度で回転する座標系の角速度の大きさ  $\omega$  とは一般には異なることに注意)

例2. 等速円運動をする質点  $\left( v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = \text{一定} \right)$

(A10) において  $\frac{d\theta}{dt} = \text{一定}$  ( $\varpi = \text{一定}$ ) と置くと

$$\left. \begin{aligned} r \text{ 方向 : } & -mr \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = F_r \left( \text{あるいは } -mr\varpi^2 = F_r \text{ あるいは } -m \frac{v_\theta^2}{r} = F_r \right) \\ \theta \text{ 方向 : } & 0 = F_\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A11})$$

等速円運動の速度, 加速度の成分と大きさをまとめて書いておく.

$$\left. \begin{aligned} v_r &= 0, \quad v_\theta = r\varpi \\ v &= \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = |v_\theta| = r|\varpi| \end{aligned} \right\} \quad (\text{A12})$$

$$\left. \begin{aligned} a_r &= -r\omega^2, \quad a_\theta = 0 \\ a &= \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = |a_r| = r\omega^2 \quad \text{あるいは} \quad = \frac{v^2}{r} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A13})$$

(b) 回転座標系での運動方程式

原点を通り、面に垂直な軸の周りに一定の角速度  $\omega$  で回転する座標系（回転座標系）では、極座標表示の運動方程式は

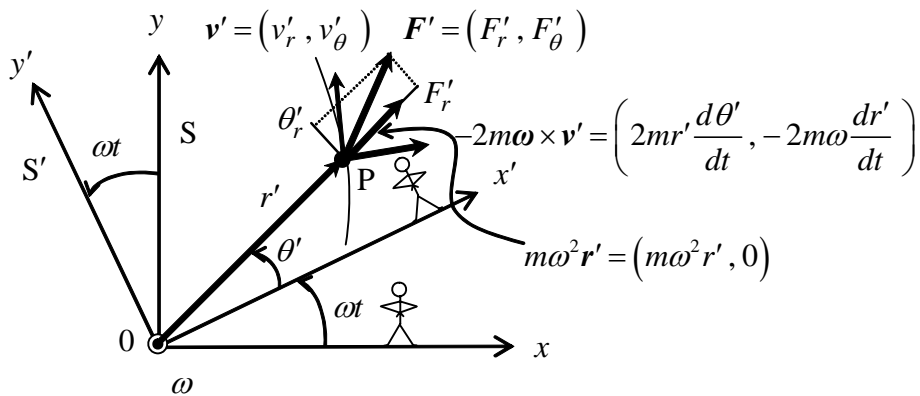
$$\left. \begin{aligned} r' \text{ 方向: } & m \left\{ \frac{d^2 r'}{dt^2} - r' \left( \frac{d\theta'}{dt} \right)^2 \right\} = F_r' + m\omega^2 r' - 2mr' \frac{d\theta'}{dt} \\ \theta' \text{ 方向: } & m \left\{ r' \frac{d^2 \theta'}{dt^2} + 2 \frac{dr'}{dt} \frac{d\theta'}{dt} \right\} = F_\theta' - 2m\omega \frac{dr'}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A14})$$

また

$$\left. \begin{aligned} v_r' &= \frac{dr'}{dt} \\ v_\theta' &= r' \frac{d\theta'}{dt} \quad \left( = r' \omega' \text{ ただし, } \omega' = \frac{d\theta'}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A15})$$

ただし、本文の (C)' 式中の  $\tilde{\mathbf{r}}'$ 、 $\tilde{\mathbf{v}}'$  は、それぞれ  $\tilde{\mathbf{r}}' = \mathbf{r}' = (r' \cos \theta', r' \sin \theta')$ 、

$\tilde{\mathbf{v}}' = \mathbf{v}' = (v_r', v_\theta')$  と置いた。



## 付録 B： 回転平面上を滑る物体の運動

例 2.6 を回転座標系で詳しく調べる. 質量  $m$  の物体 (質点) の運動方程式は本文 (2.11) 式の第 1 式, 第 2 式で  $F'_x = 0, F'_y = 0$  と置けば得られる:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= m\omega^2 x + 2m\omega \frac{dy}{dt} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= m\omega^2 y - 2m\omega \frac{dx}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B I})$$

ただし,  $x', y'$  の ' は省いた. 上の運動方程式それぞれの両辺を  $m$  で割り算すると

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \omega^2 x + 2\omega \frac{dy}{dt} & (\text{B1}) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \omega^2 y - 2\omega \frac{dx}{dt} & (\text{B2}) \end{aligned} \right.$$

となる. (B1), (B2) を出発点とし, この連立微分方程式を初期条件

$$\left\{ \begin{aligned} v_x(0) &= \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0 < 0, & x(0) &= x_0 & (\text{B3}) \\ v_y(0) &= \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0, & y(0) &= 0 & (\text{B4}) \end{aligned} \right.$$

を課して解けばよい (図 2.15 の  $\mathbf{O} \rightarrow \mathbf{P}$  の向きを  $x$  軸の正の向きとし,  $r$  を  $x_0$  と書いた.  $v_0 < 0$  に注意).

さて, 先ず (B1) 式から

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{d^2 x}{dt^2} - \omega^2 x}{2\omega} \quad (\text{B5})$$

(B5) 式を (B2) 式に代入して整理すると ((B2) 式は  $\frac{d^3 y}{dt^3} = \omega^2 \frac{dy}{dt} - 2\omega \frac{d^2 x}{dt^2}$  と書けることに注意)

$$\frac{d^4 x}{dt^4} + 2\omega^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^4 x = 0 \quad (\text{B6})$$

同様に,  $y$  に関して

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + 2\omega^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^4 y = 0 \quad (\text{B7})$$

となる.



(B6), (B7) の一般解は

(B6) 式に  $x = e^{\lambda t}$  を代入すると

$$e^{\lambda t} (\lambda^4 + 2\omega^2 \lambda^2 + \omega^4) = 0 \text{ すなわち, } \lambda^4 + 2\omega^2 \lambda^2 + \omega^4 = 0, \quad (\lambda^2 + \omega^2)^2 = 0$$

$$\therefore \lambda = \pm i\omega \text{ (重根)}$$

故に, (B6) 式的一般解は  $x(t) = e^{i\omega t} (A_1 + B_1 t) + e^{-i\omega t} (C_1 + D_1 t)$   $A_1, B_1, C_1, D_1$  は任意定数

上の一般解の表式に  $e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$  を代入し, 任意定数を和や差をまとめ直すと

$$x(t) = (A + Bt) \cos \omega t + (C + Dt) \sin \omega t \quad A, B, C, D \text{ は任意定数}$$

$$\begin{cases} x(t) = (A + Bt) \cos \omega t + (C + Dt) \sin \omega t & \text{(B8)} \\ y(t) = (E + Ft) \cos \omega t + (G + Ht) \sin \omega t & \text{(B9)} \end{cases}$$

ただし,  $A, B, C, D, E, F, G, H$  は任意定数.

先ず, (B8) 式と (B6) 式を, (B1) 式または (B2) 式に代入すると係数間の関係式が得られる.

$$H = -B, \quad F = D, \quad G = -A, \quad E = C$$

これらを (B9) 式に代入して

$$y(t) = (C + Dt) \cos \omega t - (A + Bt) \sin \omega t \quad \text{(B10)}$$

(B8) 式と (B10) 式を  $t$  で微分して

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx}{dt} = (B + \omega C + \omega Dt) \cos \omega t + (D - \omega A - \omega Bt) \sin \omega t & \text{(B11)} \\ v_y(t) = \frac{dy}{dt} = (D - \omega A - \omega Bt) \cos \omega t + (B + \omega C + \omega Dt) \sin \omega t & \text{(B12)} \end{cases}$$

次に, (B8) 式, (B10) 式, (B11) 式, (B12) 式に初期条件 (B3) 式と (B4) 式を適用する.

$$\begin{cases} v_0 = v_x(0) = B + \omega C, & x_0 = x(0) = A \\ 0 = v_y(0) = D - \omega A, & 0 = y(0) = C \end{cases}$$

故に

$$A = x_0, \quad B = v_0, \quad C = 0, \quad D = \omega x_0$$

よって

$$\begin{cases} x(t) = (x_0 + v_0 t) \cos \omega t + x_0 \omega t \sin \omega t & \text{(B13)} \\ v_x(t) = (v_0 + x_0 \omega^2 t) \cos \omega t - v_0 \omega t \sin \omega t & \text{(B14)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t) = x_0 \omega t \cos \omega t - (x_0 + v_0 t) \sin \omega t & \text{(B15)} \\ v_y(t) = -v_0 \omega t \cos \omega t - (v_0 + x_0 \omega^2 t) \sin \omega t & \text{(B16)} \end{cases}$$

(B13) ~ (B16) 式を  $\omega t \ll 1$  のとき  $\omega t$  の 1 次の項まで求めると

$$\begin{cases} x(t) \approx x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(x_0 + v_0 t)(\omega t)^2 \approx x_0 + v_0 t & \text{(B17)} \\ v_x(t) \approx v_0 + x_0 \omega (\omega t) - \frac{3}{2}v_0 (\omega t)^2 \approx v_0 + x_0 \omega (\omega t) & \text{(B18)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t) \approx (-v_0 t)(\omega t) + \left(-\frac{1}{3}x_0 + v_0 t\right)(\omega t)^3 \approx (-v_0 t)(\omega t) & \text{(B19)} \\ v_y(t) \approx -2v_0 (\omega t) - x_0 \omega (\omega t)^2 + \frac{1}{2}v_0 (\omega t)^3 \approx -2v_0 (\omega t) & \text{(B20)} \end{cases}$$

となる.  $v_0 < 0$  に注意すれば (B17), (B19) 式が, 点  $\mathbf{R}$  の位置座標であることがわかるであろう.

ついでに, 遠心力  $m\omega^2 \mathbf{r} = m\omega^2(x, y)$  を無視した場合の運動方程式を解いてみよう:

$$\left. \begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = +2m\omega \frac{dy}{dt} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = -2m\omega \frac{dx}{dt} \end{cases} \right\} \quad \text{(B II)}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = 2\omega \frac{dy}{dt} & \text{(B21)} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -2\omega \frac{dx}{dt} & \text{(B22)} \end{cases}$$

(B1), (B2) 式に課した同じ初期条件で (B1), (B2) 式を解くと (近似解も併記して)

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{2\omega} \sin 2\omega t + x_0 \approx x_0 + v_0 t - \frac{2}{3}v_0 t (\omega t)^2 \approx x_0 + v_0 t & \text{(B23)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos 2\omega t \approx v_0 \{1 - 2(\omega t)^2\} \approx v_0 & \text{(B24)} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) = -\frac{v_0}{\omega} \sin^2 \omega t \approx (-v_0 t)(\omega t) + \frac{1}{3}(v_0 t)(\omega t)^3 \approx (-v_0 t)(\omega t) \\ \dot{x}(t) = -v_0 \sin 2\omega t \quad \dot{y}(t) \approx -2v_0(\omega t) + \frac{8}{3}v_0(\omega t)^3 \approx -2v_0(\omega t) \end{array} \right. \quad (\text{B25})$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = -v_0 \sin 2\omega t \\ \dot{y}(t) \approx -2v_0(\omega t) + \frac{8}{3}v_0(\omega t)^3 \approx -2v_0(\omega t) \end{array} \right\} \quad (\text{B26})$$

となる. (B17) ~ (B20) 式の近似解は (B23) ~ (B26) 式に一致することに注意せよ. すなわち,  $\omega t$  の 1 次の項までの近似では遠心力の効果は含まれない, ということである.